

# Un Teorema de Dualidad en Matroides Orientados

DR. LEANDRO JUNES

UNIVERSITY OF SOUTH CAROLINA SUMTER

200 MILLER ROAD

SUMTER, SC, U.S.A. 29150-2498

junesl@uscsumter.edu

*Resumen:* Daremos una prueba nueva a un teorema clásico en matroides orientados. Nuestra prueba mejora la original puesto que no utiliza programación lineal, solo usa conceptos básicos de la teoría de matroides orientados y es mucho más corta.

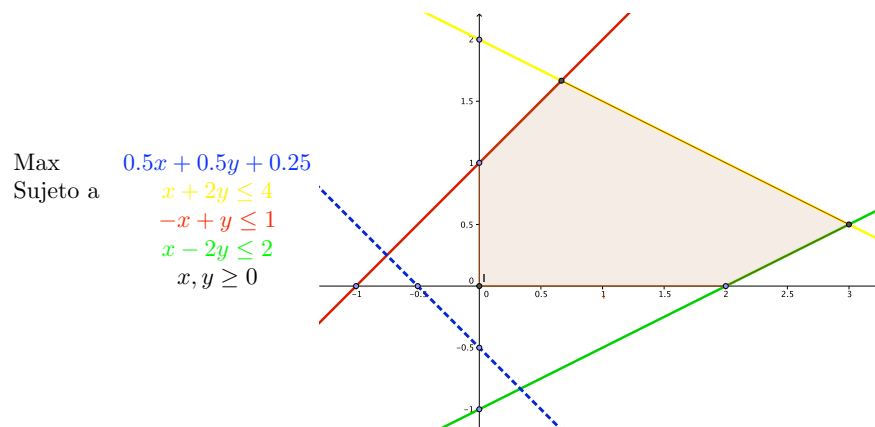
Palabras Clave: Teorema clásico matroides orientados, nueva prueba

## 1. INTRODUCCIÓN

1.1. **Programación Lineal.** Un problema de programación lineal (PL) consiste en maximizar una función lineal sujeta a un conjunto de restricciones lineales.

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & \mathbf{c}^T \cdot \mathbf{x} - d \\ \text{sujeto a} \quad & \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} \leq \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

donde  $d \in \mathbb{R}$ ,  $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ ,  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ ,  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  son dados y  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ . Considere el siguiente problema de PL en dos dimensiones



Si  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$  y  $d = -0.25$  entonces

$$\begin{array}{ll}
 \text{Max} & 0.5x + 0.5y + 0.25 \\
 \text{Sujeto a} & \begin{array}{l} x + 2y \leq 4 \\ -x + y \leq 1 \\ x - 2y \leq 2 \\ x, y \geq 0 \end{array}
 \end{array}
 \quad \text{se puede reescribir} \quad
 \begin{array}{ll}
 \text{Max} & \mathbf{c}^T \cdot \mathbf{x} - d \\
 \text{sujeto a} & \begin{array}{l} \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} \leq \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{array}
 \end{array}$$

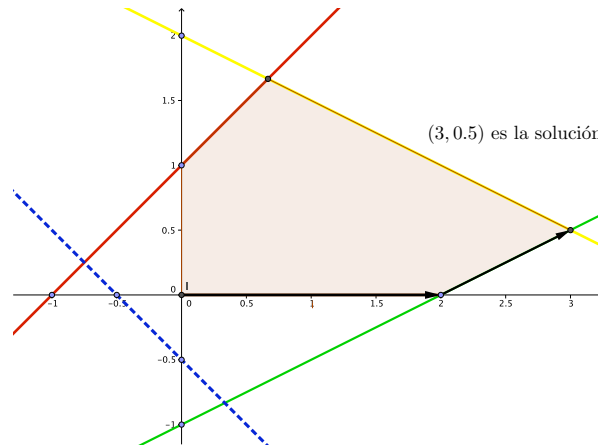
El conjunto de desigualdades  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} \leq \mathbf{b}$ ,  $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$  forma un poliedro convexo  $R$  en  $\mathbb{R}^n$ . Al poliedro  $R$  se le llama *región factible*. La función  $f = \mathbf{c}^T \cdot \mathbf{x} - d$  se llama *función objetivo*.

### Teorema 1.1.

- (1) Si  $R = \emptyset$ , entonces el problema de PL no tiene solución.
- (2) Si  $R \neq \emptyset$  y  $\{f(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in R\}$  es acotado superiormente, entonces el problema PL tiene solución. Más aún, uno de los vértices de  $R$  es solución del problema (PL).

Una manera de solucionar un problema de PL es utilizar el Algoritmo Símplex. No vamos a dar una descripción acerca del algoritmo, solo estamos interesados en la interpretación geométrica.

**Interpretación geométrica del algoritmo símplex :** Se empieza en un vértice del poliedro  $R$ . Busca todos los ejes incidentes con este punto. Se mueve a través de uno de los ejes que incrementa o mantiene el valor de la función objetivo. Si el eje no termina en un vértice, el problema (PL) no es acotado. Si termina en un vértice, se repite el proceso.



### 1.2. Dualidad.

#### Programa Principal

$$\begin{array}{ll}
 (P) : \text{Max} & \mathbf{c}^T \cdot \mathbf{x} - d \\
 \text{sujeto a} & \begin{array}{l} \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} \leq \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n \times 1} \end{array}
 \end{array}$$

#### Programa Dual

$$\begin{array}{ll}
 (P^*) : \text{Min} & \mathbf{b}^T \cdot \mathbf{y} - d \\
 \text{sujeto a} & \begin{array}{l} \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{y} \geq \mathbf{c} \\ \mathbf{y} \geq \mathbf{0} \\ \mathbf{y} \in \mathbb{R}^{m \times 1} \end{array}
 \end{array}$$

**Proposición 1.1. (Propiedades Básicas del Programa Dual)**

- (1)  $(P^{**}) = (P)$ .
- (2)  $(P^*)$  tiene tantas variables como restricciones tiene  $(P)$ .
- (3)  $(P^*)$  tiene tantas restricciones como variables tiene  $(P)$ .

**Teorema 1.2. (Propiedades del Programa Dual)** Sean  $R$  y  $R^*$  los poliedros de  $P$  y  $P^*$  respectivamente.

- (1) Si  $R \neq \emptyset$  entonces  $\{g(\mathbf{y}) \mid \mathbf{y} \in R^*\}$  es acotado inferiormente.
- (2) Si  $R^* \neq \emptyset$  entonces  $\{f(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in R\}$  es acotado superiormente.
- (3) Si  $R, R^* \neq \emptyset$  entonces los programas  $(P)$  y  $(P^*)$  tienen solución. Más aún, si  $\mathbf{x}_0$  y  $\mathbf{y}_0$  son solución de los problemas  $(P)$  y  $(P^*)$  respectivamente, entonces  $f(\mathbf{x}_0) = g(\mathbf{y}_0)$ .

2. MATROIDE ORIENTADO

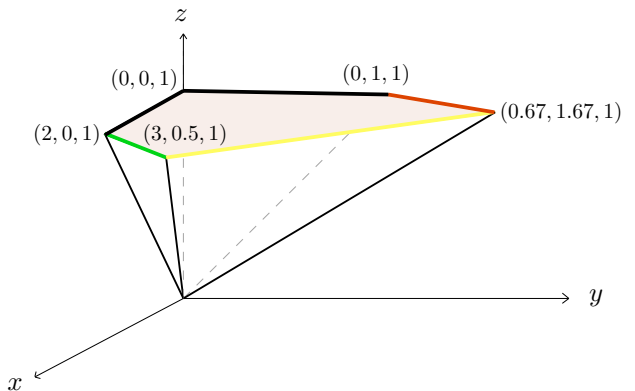
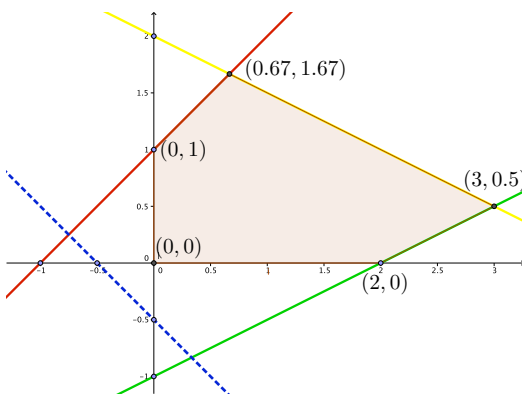
2.1. **Homogeneización.** Consideremos de nuevo el problema de PL en 2 dimensiones. Podemos homogeneizar el problema introduciendo una nueva variable  $z$ .

**Homogeneización**

$$\begin{array}{ll} \text{Max} & 0.5x + 0.5y + 0.25z \\ \text{Sujeto a} & x + 2y \leq 4 \\ & -x + y \leq 1 \\ & x - 2y \leq 2 \\ & x, y \geq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} e_1 : & x + 2y - 4z \leq 0 \\ e_2 : & -x + y - z \leq 0 \\ e_3 : & x - 2y - 2z \leq 0 \\ e_4 : & x \geq 0 \\ e_5 : & y \geq 0 \\ f : & 0.5x + 0.5y + 0.25z \geq 0 \\ g : & z \geq 0 \end{array}$$


Esto permite codificar el problema de PL con un conjunto de siete semiplanos en  $\mathbb{R}^3$ . El programa original se embebe en el plano  $z = 1$ .



La homogeneización permite ver el problema de PL desde un punto de vista combinatorio. La siguiente discusión justifica nuestra afirmación.

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & \mathbf{c}^T \cdot \mathbf{x} - d \\ \text{sujeto a} \quad & \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} \leq \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

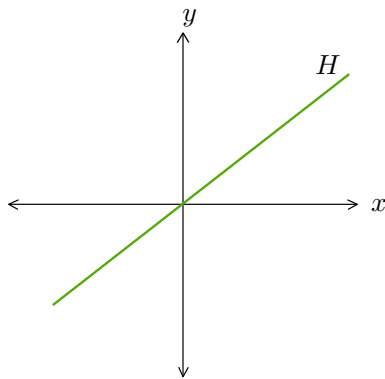
$$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_{n-1})$$

  
Homogeneización  
con variable  $x_n$

$$H_i^{\geq 0} = \{(\mathbf{x}, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_{i,1}x_1 + \dots + a_{i,n-1}x_{n-1} + a_{i,n}x_n \geq 0\}$$

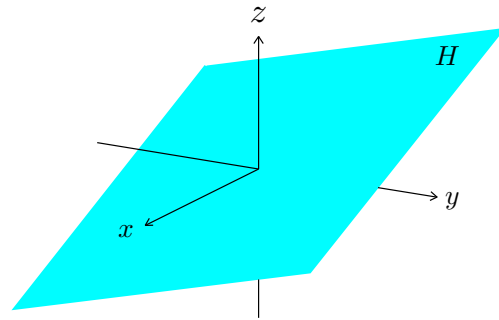
- El problema PL se codifica con  $\{H_1^{\geq 0}, \dots, H_k^{\geq 0}, H_f^{\geq 0}, H_g^{\geq 0}\}$ .
- $H_i^0$  es un subespacio de dimensión  $n - 1$  en  $\mathbb{R}^n$ .
- $H_i^{\geq 0} = H_i^0 \cup H_i^{>0}$ .

**2.2. Colección de Hiperplanos Orientados.** Un *hiperplano*  $H$  es un subespacio de dimensión  $n - 1$  en  $\mathbb{R}^n$ .



$$\dim(H) = 1$$

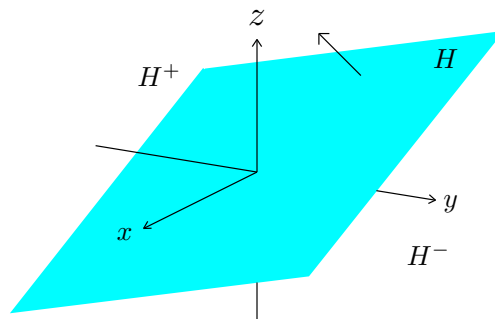
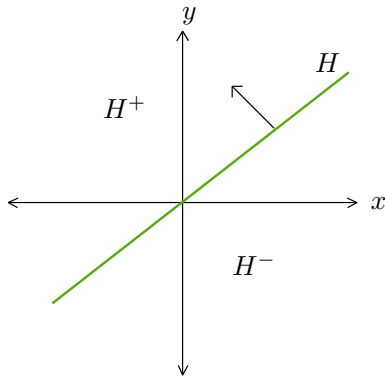
$H$  es un hiperplano en  $\mathbb{R}^2$



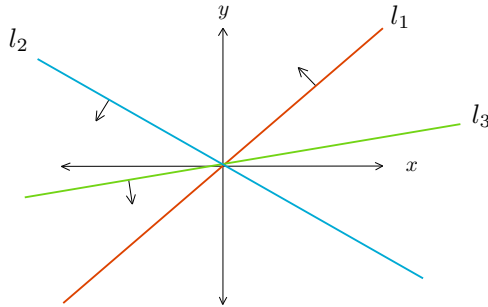
$$\dim(H) = 2$$

$H$  es un hiperplano en  $\mathbb{R}^3$

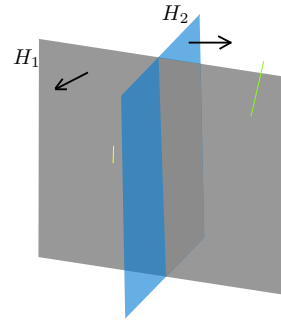
Un *hiperplano orientado* es una tripleta  $(H, H^+, H^-)$  donde  $H$  es un hiperplano y  $H^+, H^-$  son los dos semiespacios abiertos generados por  $H$ .



Una *colección de hiperplanos orientados* es un multi-conjunto  $\mathcal{H} = ((H_i, H_i^+, H_i^-) \mid i \in E)$  donde  $E$  es finito y no vacío.

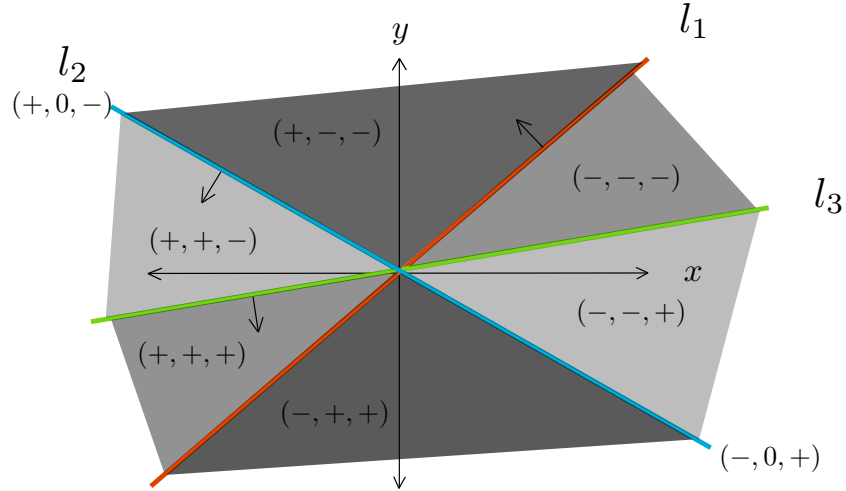


Colección de hiperplanos orientados en  $\mathbb{R}^2$



Colección de hiperplanos orientados en  $\mathbb{R}^3$

La colección  $((H_i, H_i^+, H_i^-) \mid i \in E)$  divide a  $\mathbb{R}^n$  en un conjunto finito de conos abiertos.



$$E = \{1, 2, 3\}$$

$$\mathcal{V}^*(\mathcal{H}) = \{(+, -, -), (-, -, -), (-, -, +), (-, +, +), (+, +, +), (+, +, -), (+, 0, -), (0, -, -), (-, -, 0), (-, 0, +), (0, +, +), (+, +, 0), (0, 0, 0)\}$$

En este ejemplo, cada cono abierto se puede representar por una tripleta de signos. La tripleta de signos describe la posición relativa del cono con respecto a los tres hiperplanos  $l_1, l_2$  y  $l_3$ . Procediendo de manera similar, una colección de  $k$  hiperplanos divide a  $\mathbb{R}^n$  en conos abiertos. Cada cono abierto se puede representar por una  $k$ -tupla de signos. La  $k$ -tupla de signos describe la posición relativa del cono con respecto a los  $k$  hiperplanos. El conjunto de todas las  $k$ -tuplas de signos se denota por  $\mathcal{V}^*(\mathcal{H})$ .

Si  $X \in \{+, 0, -\}^E$ , se define  $-X$  por  $(-X)(e) = -X(e)$  para cada  $e \in E$ , con las reglas de signos obvias. Tambien definimos  $X^+$  y  $X^-$  de la siguiente manera:  $X^+ = \{e \in E \mid X(e) = +\}$  y  $X^- = \{e \in E \mid X(e) = -\}$ . El símbolo  $Supp(X)$  denotará  $X^+ \cup X^-$ .

*Definición 2.1.* Para cada  $X, Y \in \{+, 0, -\}^E$ ,  $X \circ Y$  se define por

$$(X \circ Y)(i) = \begin{cases} X(i) & \text{Si } X(i) \neq 0 \\ Y(i) & \text{Si } X(i) = 0 \end{cases}$$

*Definición 2.2.* Un *matroide orientado*  $M$  es una pareja  $(E, \mathcal{V}^*)$  tal que

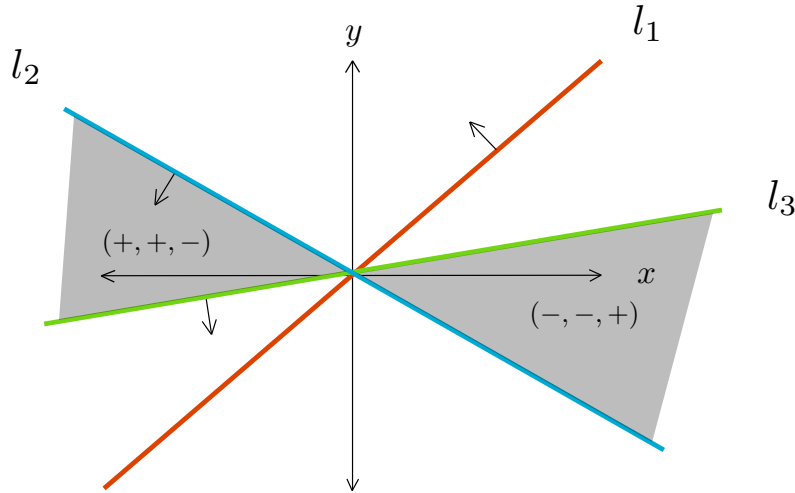
- (1)  $0 < |E| < \infty$  y  $\mathcal{V}^* \subseteq \{+, 0, -\}^E$ .
- (2)  $(0, \dots, 0) \in \mathcal{V}^*$ .
- (3) (Simetría) Para cada  $X \in \mathcal{V}^*$ ,  $-X \in \mathcal{V}^*$ .
- (4) (Composición) Para cada  $X, Y \in \mathcal{V}^*$ ,  $X \circ Y \in \mathcal{V}^*$
- (5) (Eliminación) Para cada  $X, Y \in \mathcal{V}^*$  y  $e \in X^+ \cap Y^-$  existe  $Z \in \mathcal{V}^*$  tal que

- $Z^+ \subseteq (X^+ \cup Y^+) \setminus \{e\}$
- $Z^- \subseteq (X^- \cup Y^-) \setminus \{e\}$

y para cada  $f \in E$  tal que  $\{X(f), Y(f)\} \neq \{0\}$  y  $\{X(f), Y(f)\} \neq \{+, -\}$  se tiene que  $f \in Z^+ \cup Z^-$ .

La definición anterior tiene una interpretación geométrica desde el punto de vista de los conos abiertos. La condición (1) solo dice que  $E$  es finito no vacío y  $\mathcal{V}^*$  está compuesto por  $k$ -tuplas de signos donde  $k = |E|$ . Es decir, hay una colección finita de hiperplanos y  $\mathcal{V}^*$  es el conjunto de las  $k$ -tuplas de signos correspondientes a los conos abiertos.

Condición (2) dice que el origen de  $\mathbb{R}^n$  es un cono. Condición (3) muestra que si un cono está en la colección, el cono opuesto también pertenece a la colección. Ver figura

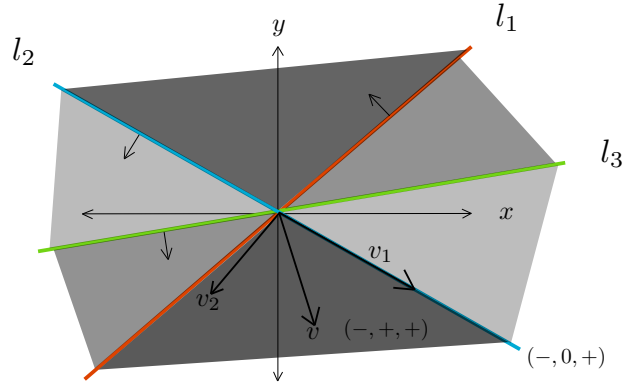


Condición (4) requiere una discusión más profunda. Considere los vectores  $v_1$  and  $v_2$  de la siguiente figura. Para cada  $\epsilon \geq 0$  el vector  $v = v_1 + \epsilon v_2$  pertenece a uno de los conos determinados por la colección de hiperplanos. Más aún,  $v$  se obtiene moviendo  $v_1$  hacia  $v_2$ . Tome  $\epsilon$  suficientemente pequeño para que  $v_1$  y  $v$  estén en el mismo lado de  $l_1$  y  $l_2$ . Ahora, sean  $X_1 = (-, 0, +)$ ,  $X_2 = (-, +, +)$  y  $X$  las tripletas de signos correspondientes a  $v_1$ ,  $v_2$  y  $v$  respectivamente. Puesto que  $\epsilon$  es pequeño, se obtiene que  $X = (-, +, +)$ . Note que  $X$  se obtiene de  $X_1$  y  $X_2$  reemplazando los ceros de  $X_1$  con las entradas correspondientes de  $X_2$ . Es decir,  $X = X_1 \circ X_2$ . En conclusión, condición (4) básicamente dice que el sistema de conos abiertos es cerrado bajo combinaciones lineales.

Para cada  $X, Y \in \mathcal{V}^*$ ,  $X \circ Y \in \mathcal{V}^*$

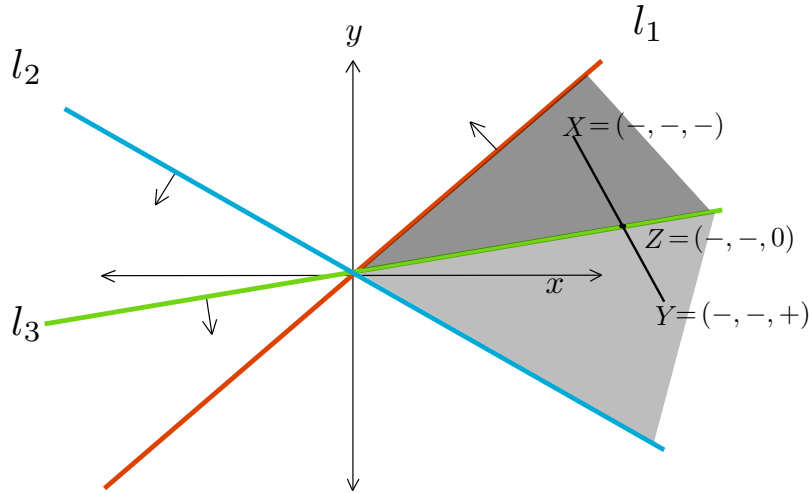
$X \circ Y$  se define por

$$(X \circ Y)(i) = \begin{cases} X(i) & \text{Si } X(i) \neq 0 \\ Y(i) & \text{Si } X(i) = 0 \end{cases}$$



$$v = v_1 + \epsilon v_2$$

Para interpretar condición (5) de manera geométrica considere dos conos abiertos  $X = (-, -, -)$  y  $Y = (-, -, +)$  en lados opuestos del hiperplano  $l_3$ .



Es decir,  $3 \in X^+ \cap Y^-$ . Cualquier segmento desde el cono  $X$  al cono  $Y$  cruza el cono determinado por  $Z = (-, -, 0)$ . Este vector de signos  $Z$  satisface las condiciones requeridas por (5).

Hemos visto que una colección de hiperplanos orientados produce una colección de  $k$ -tuplas de signos que satisface la definición de matroide orientado. Una pregunta natural es la siguiente: Dado un matroide orientado  $(E, \mathcal{V}^*)$ , ¿existe una colección de hiperplanos orientados que produce la misma colección de  $k$ -tuplas de signos  $\mathcal{V}^*$ ?. La respuesta es no.

*Definición 2.3.* Un matroide orientado  $(E, \mathcal{V}^*)$  se llama realizable si existe una colección de hiperplanos orientados  $\mathcal{H}$  tal que  $\mathcal{V}^*(\mathcal{H}) = \mathcal{V}^*$ .

En la literatura hay varios ejemplos de matroides orientados que no son realizables. Para esto ver [1] páginas 305 y 308.

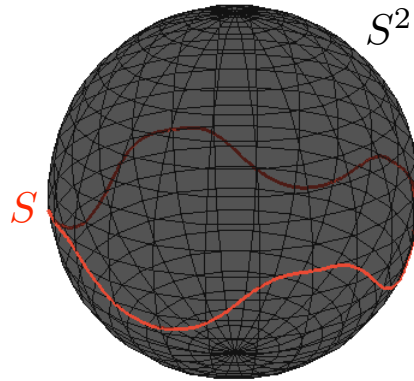
Apesar de que no todos los matroides orientados son realizables, cada matroide orientado se puede representar por una colección de pseudoesferas orientadas. El resultado se llama **Teorema de Representación**

**Topológica** y fue probado por Folkman and Lawrence en 1978 (ver [4]). Además de ser uno los descubrimientos centrales en la teoría de matroides orientados, este teorema ofrece una conexión entre la combinatoria y la topología. Nuestro próximo objetivo es describir este importante resultado en forma precisa.

**2.3. Teorema de Representación Topológica.** Se denota por  $S^m$  (para  $m \geq 0$ ) la  $m$ -esfera en  $\mathbb{R}^{m+1}$ , es decir

$$S^m = \{(x_1, \dots, x_m, x_{m+1}) \mid x_1^2 + \dots + x_m^2 + x_{m+1}^2 = 1\}$$

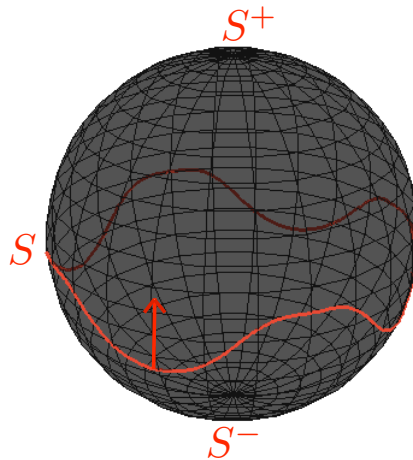
*Definición 2.4.* Sea  $r \geq 1$ . Decimos que  $S \subseteq S^{r-1}$  es una pseudoesfera de dimensión  $(r-2)$  si existe un homeomorfismo  $\varphi : S^{r-1} \rightarrow S^{r-1}$  tal que  $\varphi(S) = \{(x_1, \dots, x_r) \in S^{r-1} \mid x_r = 0\}$ . Es decir,  $\varphi$  envía  $S$  al ecuador  $\{(x_1, \dots, x_r) \in S^{r-1} \mid x_r = 0\}$ .



pseudoesfera  $S$  de dimensión 1 en  $S^2$

Si  $S$  es a pseudoesfera de dimensión  $(r-2)$  en  $S^{r-1}$ , entonces  $S^{r-1} \setminus S$  tiene dos componentes conexas. Cada una de ellas es homeomorfa a una bola abierta de dimensión  $(r-1)$ . Una *pseudoesfera orientada* es una pseudoesfera donde se escoge una de estas componentes como la parte positiva, que se denota por  $S^+$ . La otra componente se denota por  $S^-$ . De manera precisa

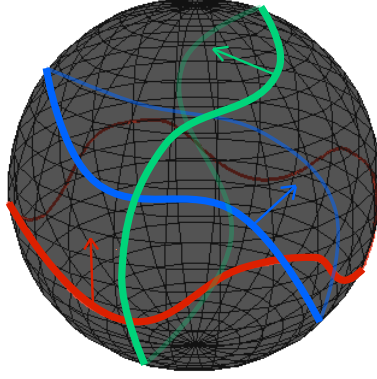
*Definición 2.5.* Sea  $S \subseteq S^{r-1}$  una pseudoesfera de dimensión  $(r-2)$ . Una pseudoesfera orientada es una tripleta  $(S, S^+, S^-)$ , donde  $S^+$  y  $S^-$  son las componentes conexas de  $S^{r-1} \setminus S$ .



*Definición 2.6.* Un multiconjunto finito  $\mathcal{A} = ((S_e, S_e^+, S_e^-))_{e \in E}$  de pseudoesferas orientadas en  $S^{r-1}$  se llama *colección de pseudoesferas orientadas* si las siguientes condiciones se cumplen:

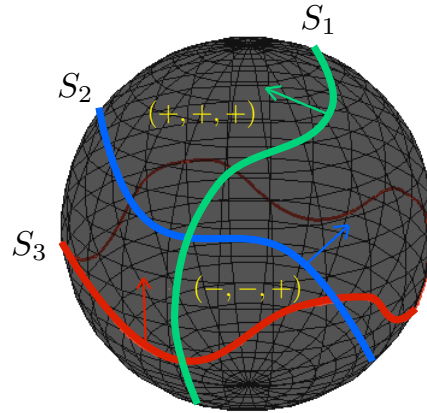


- (1) Si  $A \subseteq E$ , entonces  $S_A = \bigcap_{e \in A} S_e$  es una esfera topologica. Además,  $S_E = \emptyset$ .
- (2) Si  $A \not\subseteq E$ ,  $e \in E$  y  $S_A = \left(\bigcap_{e \in A} S_e\right) \not\subseteq S_e$ , entonces  $S_A \cap S_e$  es una pseudoesfera en  $S_A$ , y sus dos componentes conexas son  $S_A \cap S_e^+$  y  $S_A \cap S_e^-$ .



Las condiciones (1) y (2) de la definición anterior se imponen para descartar casos extremos. Por ejemplo, dos pseudoesferas no se pueden cortar tangencialmente.

Dado una colección de pseudoesferas orientadas  $\mathcal{A} = ((S_e, S_e^+, S_e^-))_{e \in E}$  en  $S^{r-1}$ , para cada  $x \in S^{r-1}$  nosotros podemos asociar un vector de signos  $\sigma_x = (\sigma_x(e_1), \dots, \sigma_x(e_n))$ , donde  $\sigma_x(e)$  denota el lado de  $S_e$  en el cual  $x$  está. Esto permite descomponer la esfera  $S^{r-1}$  en un conjunto de celdas abiertas. Cada celda abierta corresponde a un vector de signos.



Al conjunto de todos los vectores de signos provenientes de  $\mathcal{A} = ((S_e, S_e^+, S_e^-))_{e \in E}$  se denota por  $\mathcal{V}^*(\mathcal{A})$ .

Antes de pasar al Teorema de Representación Topológica necesitamos unas definiciones preliminares

*Definición 2.7.* Sea  $\mathcal{M} = (E, \mathcal{V}^*)$  un matroide orientado y  $e \in E$ .

- (1) Decimos que  $e$  es un ciclo en  $\mathcal{M}$  si para cada  $X \in \mathcal{V}^*(\mathcal{M})$  se tiene que  $X(e) = 0$ .
- (2) Decimos que  $e$  es un cociclo en  $\mathcal{M}$  si existe  $X \in \mathcal{V}^*(\mathcal{M})$  tal que  $X(e) \neq 0$  and  $X(f) = 0$  para cada  $f \in E \setminus \{e\}$ .

*Definición 2.8.* Sea  $\mathcal{A} = ((S_e, S_e^+, S_e^-))_{e \in E}$  una colección de pseudoesferas orientadas en  $S^{r-1}$ . Decimos que  $\mathcal{A}$  es centralmente simétrico si  $S_e = -S_e$  para cada  $e \in E$ .

**Teorema 2.1. Teorema de Representación Topológica** (Lawrence y Falkman)

Sea  $\mathcal{V}^* \subseteq \{+, -, 0\}^E$ . Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

- (1)  $(E, \mathcal{V}^*)$  es un matroide orientado libre de ciclos.
- (2) Existe una colección de pseudoesferas orientadas centralmente simétrico  $\mathcal{A} = ((S_e, S_e^+, S_e^-))_{e \in E}$  en  $S^{r-1}$  tal que  $\mathcal{V}^* = \mathcal{V}^*(\mathcal{A})$ .

El teorema anterior muestra que cualquier matroide orientado libre de ciclos proviene de una una colección de pseudoesferas orientadas centralmente simétrico.

**2.4. Dualidad.** La teoría de dualidad juega un papel central en la teoría de matroides orientados.

*Definición 2.9.* Sean  $X, Y \in \{+, -, 0\}^E$  y  $A \subseteq \{+, -, 0\}^E$ . Decimos que  $Y \perp X$  si  $X \cdot Y = \{X(e) \cdot Y(e) \mid e \in E\} \subseteq \{+, -\}$  ó  $X \cdot Y = \{0\}$ . Definimos  $A^\perp = \{Y \in \{+, -, 0\}^E \mid Y \perp X, \text{ para todo } X \in A\}$ .

**Teorema 2.2.** Si  $(E, \mathcal{V}^*)$  es un matroide orientado, entonces  $(E, (\mathcal{V}^*)^\perp)$  también es un matroide orientado.

El matroide orientado del teorema anterior se denota por  $\mathcal{M}^*$ . Es decir,  $\mathcal{M}^* = (E, (\mathcal{V}^*)^\perp)$ .

*Definición 2.10.* Un *programa en matroides orientados* es una tripleta  $(\mathcal{M}, g, f)$ , donde  $\mathcal{M} = (E, \mathcal{V}^*)$  es un matroide orientado,  $E = \{1, 2, \dots, n, g, f\}$ ,  $g$  no es un ciclo,  $f$  no es un cociclo, y  $f \neq \pm g$ . El *programa dual* de  $(\mathcal{M}, g, f)$  es el programa en matroides orientados  $(\mathcal{M}^*, f, g)$ .

Recordemos que un problema de PL se puede codificar con un arreglo de hiperplanos orientados donde dos de ellos se denotan con  $g$  y  $f$ . El hiperplano  $f$  representa la función a maximizar, y el hiperplano  $g$  representa la variable que se utiliza para homogeneizar el problema. La definición anterior generaliza el problema de PL a un programa en matroides. En este caso decimos que  $(\mathcal{M}, g, f)$  representa el problema de programación lineal. Utilizando la notación dada en los preliminares obtenemos el siguiente resultado

**Teorema 2.3.** Sea

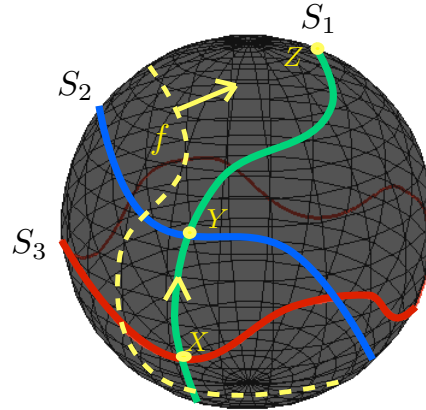
$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & \mathbf{c}^T \cdot \mathbf{x} - d \\ \text{sujeto a} \quad & \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} \leq \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

un problema de programación lineal. Si  $\mathcal{M}$  es el matroide orientado generado por los hiperplanos orientados  $\{H_1^{\geq 0}, \dots, H_k^{\geq 0}, H_f^{\geq 0}, H_g^{\geq 0}\}$ , entonces  $(\mathcal{M}^*, f, g)$  representa el problema de PL dual.

Este teorema fue probado por Bland en 1974 (ver [5]).

Otra parte fundamental en la teoría de PL es el Algoritmo Símplex. Recordemos que la idea central del Algoritmo Símplex es la orientación de los caras 1-dimensionales del poliedro  $R$  en la dirección del gradiente de la función objetivo. La siguiente discusión es una generalización de esta idea.

Sea  $(\mathcal{M}, g, f)$  un programa en matroides orientados y tomemos una representación de  $\mathcal{M}$  dada por el Teorema de Representación Topológica. Podemos definir un grafo parcialmente orientado  $G_{(\mathcal{M}, g, f)}$  del programa en matroides orientados. Los vertices de  $G_{(\mathcal{M}, g, f)}$  son las celdas 0-dimensionales de la representación topológica de  $\mathcal{M}$  que están en la parte positiva de la pseudoesfera  $g$ . Los ejes de  $G_{(\mathcal{M}, g, f)}$  son los pares de vertices  $(Y_1, Y_2)$  talque  $Y_1$  y  $Y_2$  son adjacentes y están unidas por una celda de dimensión 1. Algunos de los ejes de  $G_{(\mathcal{M}, g, f)}$  se pueden dirigir de la siguiente manera: Sea  $(Y_1, Y_2)$  un eje de  $G_{(\mathcal{M}, g, f)}$ . Empezando en  $Y_1$  se viaja a través de la pseudoesfera de dimensión 1 determinada por  $Y_1$  y  $Y_2$  hacia  $Y_2$  hasta que se intersecta la pseudoesfera  $g$  en un vértice  $Z$ . Si  $Z$  está en el lado positivo de  $f$ , entonces  $(Y_1, Y_2)$  se orienta de  $Y_1$  a  $Y_2$ . Si  $Z$  está en el lado negativo de  $f$ , entonces  $(Y_1, Y_2)$  se orienta de  $Y_2$  a  $Y_1$ . Si  $Z$  está en la pseudoesfera  $f$ , entonces  $(Y_1, Y_2)$  no se orienta. Ver figura



En general  $G_{(\mathcal{M},g,f)}$  es un grafo con ejes orientados y no orientados (por ejemplo, los ejes que están en la pseudoesfera  $f$  no están orientados). Se escribe  $Y_1 \prec Y_2$  si el eje  $(Y_1, Y_2)$  de  $G_{(\mathcal{M},f,g)}$  se orienta de  $Y_1$  a  $Y_2$  o no está orientado.

*Definición 2.11.* Un ciclo en  $(\mathcal{M}, g, f)$  es una secuencia  $(Y_1, Y_2, \dots, Y_k)$  de vértices de  $G_{(\mathcal{M},g,f)}$ , tal que  $Y_i \prec Y_{i+1}$  para todo  $i \in \{1, 2, \dots, k\}$  (índices se toman módulo  $k$ ). Se dice que el ciclo es *orientado* si por lo menos un eje está orientado.

*Definición 2.12.* Un programa en matroides orientados  $(\mathcal{M}, g, f)$  se llama *Euclidiano* si el grafo  $G_{(\mathcal{M},g,f)}$  no contiene ningún ciclo orientado.

Se conoce que todos los programas en matroides orientados  $(\mathcal{M}, g, f)$  que representan problemas de PL son Euclidianos (Ver [1] página 429).

### 3. RESULTADO NUEVO

Vamos a mencionar un resultado original en esta sección. Es una prueba nueva para un teorema clásico de la teoría de dualidad en matroides orientados.

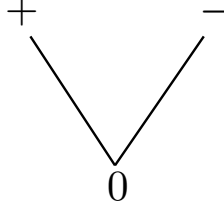
El siguiente es el resultado clásico

**Teorema 3.1.** (Fukuda) *El programa en matroides orientados  $(\mathcal{M}, g, f)$  es Euclidiano si y solo si el programa en matroides orientados  $(\mathcal{M}^*, f, g)$  es Euclidiano.*

La prueba de este teorema fue dada por Fukuda (ver [2]). Dicha prueba es extensa y requiere la construcción de maquinaria especial llamada Tablero. Hasta donde el autor conoce, esta técnica solo se utiliza en este teorema. Resulta natural pensar que existe una prueba mucho más simple, elegante y que solo utiliza ideas básicas de la teoría de matroides orientados.

En la siguiente discusión se presentaran las ideas básicas de la nueva prueba. No se aspira a dar una presentación detallada, solo deseamos bosquejar las ideas principales. Antes de pasar al bosquejo de la prueba necesitamos unas tecnicidades.

Vamos a considerar a  $\{+, -, 0\}$  como un conjunto parcialmente ordenado con el siguiente diagrama de Hasse



*Definición 3.1.* Sean  $X, Y \in \{+, -, 0\}^E$ . Decimos que  $X \leq Y$ , si  $X(e) \leq Y(e)$  para todo  $e \in E$ .

Si  $\mathcal{M} = (E, \mathcal{V}^*)$  es un matroide orientado, entonces la definición anterior induce un order parcial en  $\mathcal{V}^* \subseteq \{+, -, 0\}^E$ . A los elementos minimales de  $\mathcal{V}^*$  se les llama *cocircuitos*. En términos de una representación topológica de  $\mathcal{M}$ , los cocircuitos corresponden a las celdas 0-dimensionales. La misma discusión se puede dar para el matroide orientado dual  $\mathcal{M}^* = (E, \mathcal{V}^{**})$ . Los elementos minimales de  $\mathcal{V}^{**}$  se llaman *circuitos*.

*Definición 3.2.* Sea  $\mathcal{M} = (E, \mathcal{V}^*)$  un matroide orientado. Decimos que  $D \subseteq E$  es dependiente en  $\mathcal{M}$  si existe un circuito  $C \in \mathcal{V}^{**}$  tal que  $\text{Supp}(C) \subseteq \text{Supp}(D)$ . Un subconjunto  $I$  de  $E$  se llama independiente en  $\mathcal{M}$  si  $I$  no es dependiente.

**Teorema 3.2.** *Sea  $\mathcal{M} = (E, \mathcal{V}^*)$  un matroide orientado. Si  $I$  y  $I'$  son independientes en  $\mathcal{M}$  y maximales en el conjunto parcialmente ordenado  $(E, \subseteq)$ , entonces  $|I| = |I'|$ .*

Cualquier conjunto maximal independiente  $I$  en  $\mathcal{M}$  se llama *base*. El teorema anterior muestra que cualquiera dos bases de  $\mathcal{M}$  tienen la misma cardinalidad. El número de elementos de cualquier base de  $\mathcal{M}$  se llama rango de  $\mathcal{M}$  y se denota por  $\text{rank}(\mathcal{M})$ .

**Teorema 3.3.** *Sea  $\mathcal{M} = (E, \mathcal{V}^*)$  un matroide orientado. Si  $Y$  un cocircuito de  $\mathcal{M}$  y  $a \in E$  es tal que  $Y(a) = +$ , entonces existe una base  $B'$  de  $\mathcal{M}^*$  tal que  $a \notin B'$  y  $\text{Supp}(Y) \subseteq B' \cup \{a\}$ .*

En el caso del teorema anterior diremos que la base  $B'$  cubre al cocircuito  $Y$ . Dada una base  $B$ , existe un único cocircuito  $Y$  con la propiedad del teorema anterior.

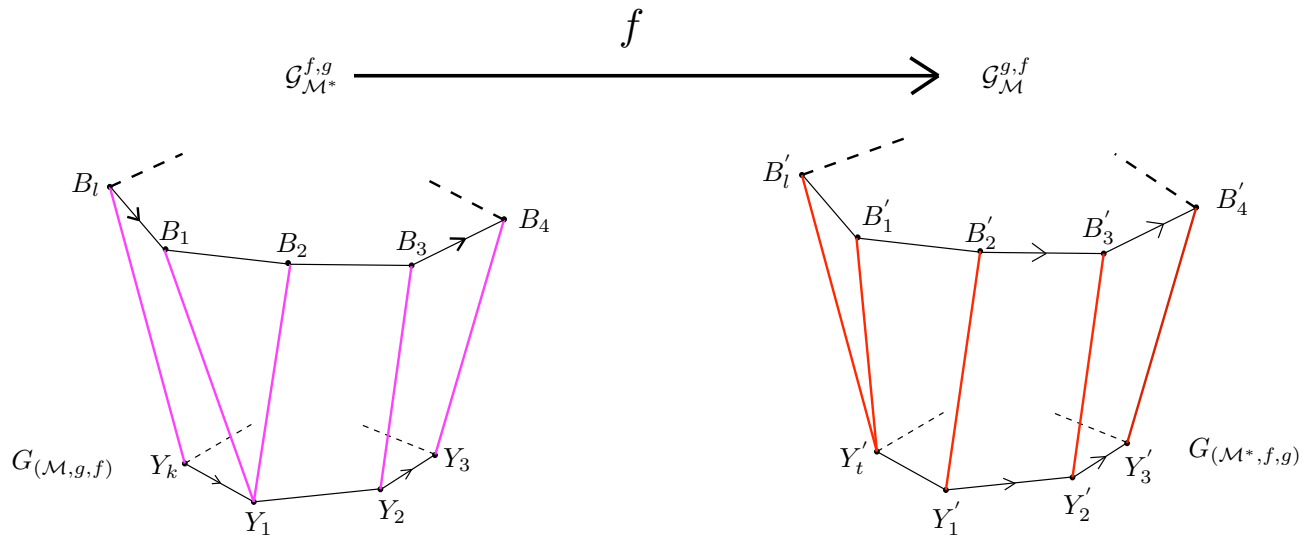
Para llevar acabo nuestra prueba necesitamos considerar otro grafo. Sea  $\mathcal{G}_{\mathcal{M}^*}$  el grafo de bases de  $\mathcal{M}^*$ . Es decir, los vértices de  $\mathcal{G}_{\mathcal{M}^*}$  son las bases de  $\mathcal{M}^*$ , y los ejes son pares  $(B_1, B_2)$  de vértices tal que  $B_1$  y  $B_2$  difieren en un elemento. Defina el subgrafo inducido  $\mathcal{G}_{\mathcal{M}^*}^{f,g}$  de  $\mathcal{G}_{\mathcal{M}^*}$  tomando todos los vértices  $B$  tal que  $f \in B$  and  $g \notin B$ . También se pueden dirigir los ejes de  $\mathcal{G}_{\mathcal{M}^*}^{f,g}$  de la siguiente manera: Sea  $(B_1, B_2)$  un eje y  $Y_1, Y_2$  los covectores que son cubiertos por  $B_1$  y  $B_2$  respectivamente. Se puede probar que  $(Y_1, Y_2)$  es un eje de  $G_{(\mathcal{M},g,f)}$  o que  $Y_1 = Y_2$ .

- Si  $Y_1 = Y_2$ , entonces  $(B_1, B_2)$  no se dirige.
- Si  $(Y_1, Y_2)$  es un eje no dirigido en  $G_{(\mathcal{M},g,f)}$ , entonces  $(B_1, B_2)$  no se dirige.
- Si  $(Y_1, Y_2)$  es dirigido de  $Y_1$  a  $Y_2$  en  $G_{(\mathcal{M},g,f)}$ , entonces  $(B_1, B_2)$  se dirige de  $B_1$  a  $B_2$ .

Diremos que un ciclo  $(B_1, \dots, B_k)$  en  $\mathcal{G}_{\mathcal{M}^*}^{f,g}$  es dirigido si por lo menos uno de sus ejes  $(B_i, B_{i+1})$  es dirigido de  $B_i$  a  $B_{i+1}$ . Por la construcción de  $\mathcal{G}_{\mathcal{M}^*}^{f,g}$  es fácil probar que  $(\mathcal{M}, g, f)$  es Euclideano si y solo si  $\mathcal{G}_{\mathcal{M}^*}^{f,g}$  es libre de ciclos.

**Teorema 3.4.** *Existe una función biyectiva  $f : \mathcal{G}_{\mathcal{M}^*}^{f,g} \rightarrow \mathcal{G}_{\mathcal{M}^*}^{g,f}$  que lleva ciclos en ciclos.*

El siguiente diagrama dá la nueva prueba al resultado.



#### 4. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

La importancia de la nueva prueba radica en su simplicidad cuando se comparada con la prueba original por Fukuda. Las ideas son básicas, pero creativas. Para un entendimiento completo de esta charla se recomienda la lectura de la bibliografía y del artículo que se publicará en un corto periodo de tiempo.

#### REFERENCES

- [1] A. Björner, M. Las Vergnas, B. Sturmfels, N. White, G. Ziegler. (1991). *Oriented Matroids*, Second Edition, Encyclopedia of Mathematics and Applications, Cambridge University Press, New York.
- [2] J. Edmonds, K. Fukuda. (1982). *Oriented Matroid Programming*, Ph. D. Thesis of K. Fukuda, University of Waterloo, 223 páginas.
- [3] K. Howard. (1991). *Linear Programming*, Progress in Theoretical Computer Science, Birkhauser, Boston.
- [4] J. Folkman, J. Lawrence. (1978). *Oriented Matroids*, *J. Combinatorial Theory*, Ser. B, **25**, 199 - 236.
- [5] R.G. Bland. (1974). *Complementary Orthogonal Subspaces of  $\mathbb{R}^n$  and Orientability of Matroids*, Ph. D. Thesis, Cornell University, 80 páginas.