Números de Fibonacci.

Parte1

Pedro Fernández Espinosa
pedroel13@hotmail.com

Febrero de 2011

- Leonardo de Pisa
- Liber Abaci
- The Fibonacci Quarterly
- The Fibonacci Association

Problema.

Supongamos que hay dos conejos recién nacidos, uno de sexo masculino y otro de sexo femenino. Encuentra el número de conejos producidos en un año si:

- *Cada nueva pareja tarda un mes en madurar sexualmente.*
- *Cada pareja produce una pareja mixta cada mes, desde el segundo mes.*
- *Todos los conejos son inmortales.*

Problema.

Número de Parejas	*Enero*	*Febrero*	*Marzo*	*Abril*	*Mayo*
Adultos	*0*	*1*	*1*	*2*	*3*
Bebes	*1*	*0*	*1*	*1*	*2*
Total	*1*	*1*	*2*	*3*	*5*

Tabla 1

Existen otras maneras de plantear el problema anterior como podemos verlo en el libro . "Números de Fibonacci"de N.N Vorobiov.

Definición

Los números $1, 1, 2, 3, 5, 8 \ldots$, *son denominados* **Números de Fibonacci**.*Y la sucesión formada por dichos números se llama* **Sucesión de fibonacci** . *A continuación se mostraran dos definiciones recursivas para el n-ésimo número de Fibonacci:*

1. $$u_1 = u_2 = 1$$
   $$u_n = u_{n-1} + u_{n-2}, n \geq 3$$

2. $$u_0 = 0; u_1 = 1$$
   $$u_n = u_{n-1} + u_{n-2}, n \geq 2$$

Para iniciar calcularemos la suma de los n primeros números de Fibonacci.

Teorema

La suma de los n primeros números de Fibonacci esta dada por:

$$u_1 + u_2 + \cdots + u - n = u_{n+2} - 1 \tag{1}$$

Demostración.

Efectivamente, tenemos:

$$\begin{array}{rcl} u_1 & = & u_3 - u_2 \\ u_2 & = & u_4 - u_3 \\ & \cdots\cdots & \\ u_n & = & u_{n+2} - u_{n+1} \end{array}$$

$\square$

Demostración.

Sumado miembro por miembro estas igualdades encontramos:

$$u_1 + u_2 + u_3 \cdots + u_n = u_{n+2} - u_2$$

, y teniendo en cuenta que $u_2 = 1$ □

Teorema

La suma de los números de Fibonacci de índices impares se tiene:

$$u_1 + u_3 + u_5 + u_7 + \cdots + u_{2n-1} = u_{2n} \tag{2}$$

Demostración.

Para demostrar este resultado tomemos: □

Demostración.

$$\begin{aligned} u_1 &= u_2 \\ u_3 &= u_4 - u_2 \\ u_5 &= u_6 - u_4 \\ &\vdots \\ u_{2n-1} &= u_{2n} - u_{2n-2} \end{aligned}$$

Sumando miembro por miembro estas igualdades, obtenemos lo buscado. □

A continuación mostraremos algunas propiedades relacionadas con la suma de los números de Fibonacci con índices pares. Y con la suma alternada de los números de Fibonacci.

Teorema

La suma de los números de Fibonacci con indices pares esta dada por:

$$u_2 + u_4 + \cdots + u_{2n} = u_{2n+1} - 1 \tag{3}$$

Demostración.

Según (1) tenemos:

$$u_1 + u_2 + u_3 \cdots + u_n = u_{n+2} - 1$$

restando de esta igualdad miembro por miembro la igualdad (2), obtenemos:

$$u_2 + u_4 + \cdots + u_{2n} = u_{2n+1} - 1$$

$\square$

Restando además, miembro por miembro (3) de (2), encontramos:

$$u_1 - u - 2 + u - 3 - u - 4 + \cdots + u_{2n-1} - u_{2n} = -u_{2n-1} + 1 \quad (4)$$

Sumemos ahora u_{2n+1} a ambos miembros de (4):

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \cdots - u_{2n} + u_{2n+1} = u_{2n} + 1 \quad (5)$$

Uniendo (4) y (5) , obtenemos la suma alternada de los números de Fibonacci:

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \cdots + (-1)^{n+1} u_n = (-1)^{n+1} u_{n-1} + 1 \quad (6)$$