Números de Fibonacci.

Pedro Fernández Espinosa, Cristian Sanabria y Carlos Rico.
pedroel13@hotmail.com ;lacoitoergosum@hotmail.com ;
caalriac@hotmail.com

Octubre de 2010

Indice

Números de Fibonacci.

Introducción.

Números de Fibonacci.

Introducción.

Introducción

Los números de Fibonacci son una de las secuencias numéricas más interesantes, que continúa ofreciendo grandes oportunidades tanto para los matemáticos profesionales y aficionados para hacer conjeturas y ampliar los límites del conocimiento matemático. Los números de Fibonacci son llamados asi en honor de Leonardo Fibonacci el matemático italiano más importante de la edad media.Esta sucesión es tan importante y fasinante que existe una asociación de aficionados de Fibonacci, **The Fibonacci Association***, dedicada al estudio de esta sucesión. La asociación, fundada en el año 1963 por Verner E. Hoggat del San Jose State College y Alfred Brousseau del St. Mary's College in California, publicando la revista* **The Fibonacci Quarterly** *dedicada a artículos relacionados con la sucesión de Fibonacci.*

Números de Fibonacci.

Reseña Historica

Historia

La secuencia de Fibonacci aparecería en el Liber Abaci libro de matemáticas publicado por Leonardo de Pisa (conocido como Fibonacci) en 1202; sin embargo estos números probablemente se habían desarrollado en la India antes de esa fecha. Para introducir conceptualmente esta sucesión Fibonacci plantearemos el siguiente problema:

Números de Fibonacci.

Problema de Fibonacci.

Problema.

Supongamos que hay dos conejos recién nacidos, uno de sexo masculino y otro de sexo femenino. Encuentra el número de conejos producidos en un año si:

- *Cada nueva pareja tarda un mes en madurar sexualmente.*
- *Cada pareja produce una pareja mixta cada mes, desde el segundo mes.*
- *Todos los conejos son inmortales.*

Supongamos, por comodidad, que la pareja original de conejos nació el 1 de enero,ellos toman un mes para madurar, por lo que sólo hay un par el 1 de febrero;el 1 de marzo, son dos meses de edad y producen un nuevo par mixto,para un total de dos pares. Continuando de esta manera, habrá tres pares el 1 de abril, cinco pares el 1 de mayo, y así sucesivamente (Véase en la Tabla 1).

Números de Fibonacci.

Problema de Fibonacci.

Problema.

Número de Parejas	*Enero*	*Febrero*	*Marzo*	*Abril*	*Mayo*	*Junio*
Adultos	*0*	*1*	*1*	*2*	*3*	*5*
Bebes	*1*	*0*	*1*	*1*	*2*	*3*
Total	*1*	*1*	*2*	*3*	*5*	*8*

Tabla 1

Números de Fibonacci.

Números de Fibonacci.

Definición

Los números $1, 1, 2, 3, 5, 8\ldots,$ *son denominados* **Números de Fibonacci**. *Estos números cumplen una propiedad muy interesante: Todo número de Fibonacci, excepto los dos primeros, son la suma de los dos números de Fibonacci inmediatamente anteriores. A continuación mostraremos dos definiciones recursivas para el n-ésimo número de Fibonacci:*

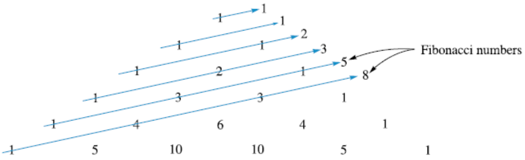
1. $$f_1 = f_2 = 1$$
   $$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, n \geq 3$$

2. $$f_0 = 0; f_1 = 1$$
   $$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, n \geq 2$$

Números de Fibonacci.

Relacaión entre los números de Fibonacci y el triangulo de Pascal.

Hay algo realmente sorprendente y es que los números de Fibonacci pueden ser extraidos del triangulo de Pascal, al sumar sus diagonales de una manera especial, como lo muestra el siguiente grafico:



Números de Fibonacci.

Números de Fibonacci.

Esta observación fue verificada en 1876 cuando Lucas proba el siguiente teorema.

Teorema

$$F_n = \sum_{i=0}^{\lfloor (n-1/2) \rfloor} \binom{n-i-1}{i}, n \geq 1$$

Demostración.

Se muestra por inducción. $\square$

Números de Fibonacci.

Números de Fibonacci.

Teorema

Consideremos los siguientes cuatro resultados que tratan de la suma de cuadrados de los números de Fibonacci:

$$\begin{aligned}
F_1^2 &= 1 = 1 \times 1 \\
F_1^2 + F_2^2 &= 1^2 + 1^2 = 2 = 1 \times 2 \\
F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 &= 1^2 + 1^2 + 2^2 = 6 = 2 \times 3 \\
F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + F_4^2 &= 1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 = 15 = 3 \times 5 \\
F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + F_4^2 + F_5^2 &= 1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 5^2 = 40 = 5 \times 8
\end{aligned}$$

Según nuestros cálculos, conjeturamos que

$$\forall n \in Z^+ \ \sum_{i=1}^{n} f_i^2 = f_n \times f_{n+1}$$

Números de Fibonacci.

Números de Fibonacci.

Demostración

Para $n = 1$, el resultado de la ecuación nos demuestra que la conjetura es verdadera en este primer caso. Si suponemos que la conjetura es cierta para algún $k \geq 1$, se obtiene por la hipótesis de inducción.

$$\sum_{i=1}^{k} f_i^2 = f_k \times f_{k+1}$$

Demostración

Y debemos probar que esto se cumple para $n = k + 1$ esto es :

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k+1} f_i^2 &= \sum_{i=1}^{k} f_i^2 + f_{k+1}^2 = (f_k \times f_{k+1}) + f_{k+1}^2 \\ &= f_{k+1}(f_k + f_{k+1}) = f_{k+2} + f_{k+1}\end{aligned}$$

Por lo tanto, la validez del caso $n = k + 1$ se sigue del caso $n = k$. Así la conjetura dada es verdadera para todo Z^+, por el principio de inducción matemática.

Números de Fibonacci.

Números de Fibonacci.

Teorema

Para $n \geq 1$, sea F_n el n-ésimo número de Fibonacci. Entonces se tiene la siguiente propiedad:

$$\sum_{i=1}^{n} f_i = f_{n+2} - 1$$

Demostración

Para $n = 1$, el resultado de la ecuación nos demuestra que la conjetura es verdadera en este primer caso. Si suponemos que la conjetura es cierta para algún $k \geq 1$, se obtiene por la hipótesis de inducción.

$$\sum_{i=1}^{k} f_i = f_{k+2} - 1$$

Números de Fibonacci.

Números de Fibonacci.

Demostración

Y debemos probar que esto se cumple para $n = k + 1$ *esto es :*

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k+1} f_i &= \sum_{i=1}^{k} f_i + f_{k+1} \\ &= f_{k+2} - 1 + f_{k+1} \\ &= f_{k+3} - 1\end{aligned}$$

Por lo tanto, la validez del caso $n = k + 1$ *se sigue del caso* $n = k$. *Así la conjetura dada es verdadera para todo* Z^+, *por el principio de inducción matemática*

Números de Fibonacci.

Números de Fibonacci.

Teorema

Una tercera propiedad de los números de Fibonacci establece que $f_n \leq (\frac{5}{3})^n$ para todo $n \in \mathbb{N}^+$. Para establecer esta desigualdad, utilizamos la forma alternativa del principio de inducción matemática.

Demostración

Para $n = 1$ tenemos que $F_1 = 1 \leq (\frac{5}{3})$. En consecuencia la propiedad es verdadera para el caso inicial .
Si suponemos que esta propiedad es verdadera también para $n = 0, 1, 2, \ldots, k-1, k$, donde $k \geq 1$, examinamos ahora lo que sucede cuando $n = k+1$. Para esto tenemos que:

$$f_{k+1} = f_k + f_{k-1} \leq \left(\frac{5}{3}\right)^k + \left(\frac{5}{3}\right)^{k-1}$$

Números de Fibonacci.

Números de Fibonacci.

Demostración

$$\begin{aligned} &= \left(\frac{5}{3}\right)^{k-1}\left(\frac{5}{3}+1\right) \\ &= \left(\frac{5}{3}\right)^{k-1}\left(\frac{8}{3}\right) = \left(\frac{5}{3}\right)^{k-1}\left(\frac{24}{9}\right) \\ &\leq \left(\frac{5}{3}\right)^{k-1}\left(\frac{25}{9}\right) = \left(\frac{5}{3}\right)^{k-1}\left(\frac{5}{3}\right)^{2} \\ &\leq \left(\frac{5}{3}\right)^{k+1} \end{aligned}$$

Números de Fibonacci.

Números de Fibonacci.

Teorema

Si $n \in \mathbb{Z}^+$, entonces:

$$\sum_{i=0}^{2n} (-1)^{i+1} f_i = -2f_{2n-1} + 1$$

Demostración

Para $n = 1$, el resultado de la ecuación nos demuestra que la conjetura es verdadera en este primer caso. Si suponemos que la conjetura es cierta para algún $k \geq 1$, se obtiene por la hipótesis de inducción.

$$\sum_{i=0}^{2k} (-1)^{i+1} f_i = -2f_{2k-1} + 1$$

Números de Fibonacci.

Números de Fibonacci.

Demostración

Examinemos ahora lo que sucede cuando $n = k + 1$. Para esto obsérvese que:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{2k+2}(-1)^{i+1}f_i &= ((-1)^{((2k+1)+1)}F_{(2k+1)} + (-1)^{((2k+2)+1)}F_{(2k+2)}) \\
&\quad -F_{(2k-1)} + 1 \\
&= -F_{(2k-1)} - F_{(2k+2)} + F_{(2k+1)} + 1 \\
&= -F_{(2k-1)} + (F_{2k} + F_{(2k-1)}) - (F_{(2k+1)} + F_{2k}) + 1 \\
&= -F_{(2k+1)} + 1
\end{aligned}$$

Números de Fibonacci.

Números de Fibonacci.

Demostración

El desarrollo anterior está basado en la definición recursiva de los números de Fibonacci, ya que tenemos :

$$F_{(2k+2)} = F_{(2k+1)} + F_{2k} y F_{(2k+1)} = F_{2k} + F_{(2k-1)}$$

De esta forma resulta entonces que la propiedad es verdadera para toda $n \in \mathbb{Z}^+$, *que es lo que queríamos demostrar.*

Bibliografia

- Thomas Koshy *Elementary Number Theory With Applications*,Academic Press,2007.
- Discrete and Combinatorial Mathematics - Ralph P. Grimaldi.
- Manfred R. Schroeder *Number Theory in Science and Communication*, second edition, 1986.
- David M. Burton *Elementary Number Theory*, University of New Hampshire, 1980.
- Fibonacci and Lucas Numbers with Applications , Thomas Koshy.