ITENU

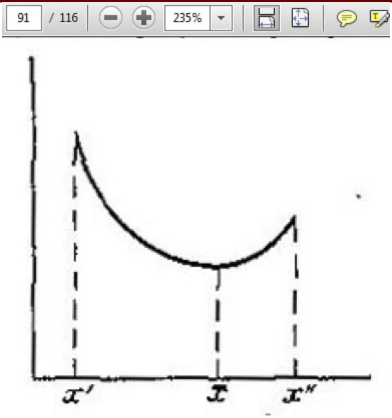
NUMEROS DE FIBONACCI Y AL TEORIA DE LA BUSQUEDA

Andrés Galindo

15 de Marzo de 2011

Situación

Supongase que respecto a una función $f(x)$ se conoce que decrece desde a partir de un x' dado hasta un Y desconocido y crece apartir de este Y hasta un x'' dado.


91
/ 116
235%
x'
x
x''

Definition

El valor de $f(y)$ se denomina **"valor minimo"**. Se dice entonces que y **ofrece el valor mínimo** a la función y también que es **el punto mínimo** de la función.

Solo vamos a considerar la funciones que primero decrecen y después crecen llamándolas, para abreviar **"funciones de un mínimo"**

Algunos comentarios

En el problemas planteado, igual que en otros semejantes, intervienen tres factores:

los objetivos que nos proponemos,

las posibilidades que tenemos para alcanzarlos y por el ultimo.

las condiciones en que debemos alcanzar los objetivos dentro de las posibilidades.

Algunos comentarios

Según los expuesto todo problema de busqueda puede tener tres aspectos:

Algunos comentarios

Según los expuesto todo problema de busqueda puede tener tres aspectos:

1. *¿En qué grado se puede alcanzar el objetivo dadas las posibilidades y las condiciones?*

Algunos comentarios

Según los expuesto todo problema de busqueda puede tener tres aspectos:

1. *¿En qué grado se puede alcanzar el objetivo dadas las posibilidades y las condiciones?*
2. *¿De qué posibilidades debemos disponer para alcanzar nuestro objetivo dadas las condiciones?*

Algunos comentarios

Según los expuesto todo problema de busqueda puede tener tres aspectos:

1. *¿En qué grado se puede alcanzar el objetivo dadas las posibilidades y las condiciones?*
2. *¿De qué posibilidades debemos disponer para alcanzar nuestro objetivo dadas las condiciones?*
3. *¿Que condiciones serán suficientes para alcanzar el objetivo dadas las posibilidades?*

Algunos comentarios

Hablando de rigor debemos considerar paralelamente dos problemas.

PROBLEMA A

- Por un lado podemos buscar el punto mínimo y y también el valor $f(y)$ que toma en él la función.

PROBLEMA B

- Por otro lado, podemos interesarnos sólo por el punto y sin ocuparnos del valor $f(y)$,

Es natural esperar que:

- dadas las posibilidades y las condiciones, el objetivo del problema A se puedan alcanzar en menor grado de exactitud que el objetivo del problema B (dados el numero n y la longitud L, en el problema B se logra un ϵ menor que el problema A).

- para alcanzar los objetivos de ambos problemas en el mismo grado, sienfo idénticas las condiciones, el problema A requiere mayores posibilidades (siendo iguales para ambos problemas el error ϵ y la longitud L del intervalo de variación de la función, en el problema A n sera mayor).

Es natural esperar que:

-para alcanzar los objetivos de ambos problemas en el mismo grado, sinedo ídenticas las posibilidades, el problema A requiere condiciones menos rígidas (los valores dados de n y ϵ corresponden en el problema A a unos valores de L menores que en el problema B).

Algunos comentarios

Para que los problemas enunciados adquieran rigor matemático, es preciso detenerse en un detalle importante.
Supongamos que nos interesan las posibilidades de determinar con exactitud ϵ *el punto de mínimo* y *en el segmento de longitud* L *,*
Supongamos que se trata del problema A.

Podemos escoger el siguiente procedimiento para determinar el punto y.

Tomamos entere 0 *y* L *un punto cualquiera* x *y calculamos los valores de* f *en los puntos* $(x-\epsilon)$, x *y* $(x+\epsilon)$, *o sea, los valores :*

$$f(x-\epsilon),\ f(x),\ f(x+\epsilon)$$

Algunos comentarios

Esto significa que la función es decreciente en $x - \epsilon$ *y creciente en* $x + \epsilon$*. Pero para pasar del decrecimiento al crecimiento debemos tocar necesariamente el valor mínimo. Por eso el valor* y *se alcanza en un punto* y *comprendido entre* $x - \epsilon$ *y* $x + \epsilon$*. Es decir* x *dista de* y *en* ϵ *todo lo mas de modo que* x *es el valor aproximado buscado para* y*.*

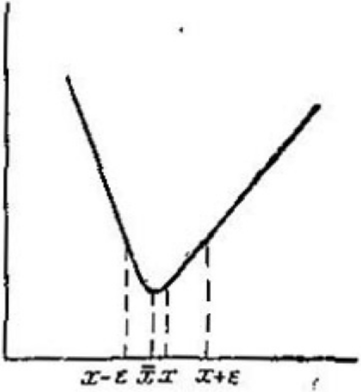
Algunos comentarios

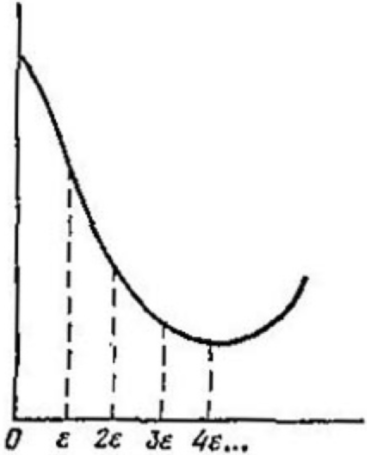
Necesitamos entonces un plan de acción que inevitablemente nos permita determinar y con la exactitud ϵ cualquiera que sea la posición de este punto y. Tales palnes existen Por ejemplo, calculemos uno tras otro los valores

$$f(0),\ f(\epsilon),\ f(2\epsilon), \ldots.$$

hasta llegar a $f(r\epsilon)$, donde $(r+1)\epsilon$ es mayor que que L (figura

21). El valor buscado será, claro está, el punto $k\epsilon$ que corresponde al menor de los valores de la sucesión


$x-\varepsilon$ $\bar{x}$ x $x+\varepsilon$


0 ε 2ε 3ε $4\varepsilon\ldots$

Algunos comentarios

Pero lo que no interesa en los problemas considerados no es determinar un plan que siempre, incluso en los casos más desfavorables permita determinar y con la exactitud requerida sino construir el mas económico, o el mejor dentro de las condiciones peores de ahora en adelante a este plan se le denomina el plan óptimo.

Supongamos que el objetivo del plan P consiste en determinar el mínimo error y a base de n observaciones el punto y que ofrece el mínimo a la función en un intervalo de longitud L. Lo llamaremos plan de n pasos .

Algunos comentarios

Supongase ahora que un plan P de n pasos permite determinar y en el segmento L con exactitud ϵ. Esta exactitud depende del plan P y también de n y de L e indicarla por $\tau_P^A(n, L)$ en el caso del problema A y $\tau_P^B(n, L)$ en el caso del problema B. por $\tau_P(n, L)$ entendemos como cualquiera de las expresiones anteriores.

En el caso del problema A, un plan P_0 de n paso, que permite determinar el mínimo de f en el segemento de longitud L, es óptimo si $\tau_{P_0}^A(n, L)\ \Delta \leq \tau_P^A(n, L)$ o tambien $\tau_{P_0}^A(n, L) = \text{mín}_p(\tau_P^A(n, L))$.

Por consiguiente, el número $\tau_{P_0}^A(n, L)$ ya no es un característica del plan sino una caracteristica del propio problema.

Ahora se mostrara el plan óptimo del problema A.

Lemma

Cualesquiera que sean $n \geq 1$ y L, existe un plan de n pasos que permite encontrar el punto mínimo y de la función f (de un mínimo) en el segmento de longitud L empleando n pasos y que posee las propiedades siguientes:

1) *en cada paso se considera un segmento $x'x''$*

2) *en el primer paso se calcula el valor de la función f en uno de los puntos $\frac{u_n}{u_{2n+2}}L$ ó $\frac{u_{n+1}}{u_{n+2}}L$;*

3) *Al iniciar cualquier k-ésimo paso siguiente(o sea, para $1 \leq k \leq n$) se calcula el valor de la función en uno de los puntos*

$$x_1 = x' + \frac{u_n}{u_{n+2}}(x'' - x) \text{ o } x_2 = x' + \frac{u_{n+1}}{u_{n+2}}(x'' - x)$$

Lemma

4)en el k-ésimo paso ($1 \leq k \leq n$) *se calcula el valor de la función en el otro punto.*

5)en el k-ésimo paso ($1 \leq k \leq n$) *se comparan los números* $f(x_1)$ *y* $f(x_2)$*; si es es* $f(x_1) \leq f(x_2)$, *en el* $(k+1) -$ *ésimo paso se considera el segmento* $x\acute{}x_2$, *y si es* $f(x_1) > f(x_2)$, *se considera el segmento* x_1x''

Algunos comentarios

El plan que se acabo de mostrar se llama plan de Fibonnacci de n pasos, abreviando, plan F_n.

Theorem

1) *El plan F_n es el único plan óptimo de n pasos.*
2) $\tau^{A}_{F_n} = \frac{L}{u_{n+2}}$.

Algunos comentarios

1). *Comparar* 1 *y n:*

a) *si* $n = 1$, *pasar al punto* 2;
b) *si* $n > 1$, *pasar al punto* 4.

2) *Calcular* $y = \frac{x' +'' x}{2}$.
3)*Calcular* $f(y)$ *y concluir el proceso.*
4)*Calcular*

$$x_1 = x' + \frac{u_n}{u_{n+2}}(x'' - x') \text{ y } x_2 = x' + \frac{u_{n+1}}{u_{n+2}}(x'' - x')$$

5) *Calcular* $f(x_1)$ *y* $f(x_2)$.
6) *Comparar* 2 *y n:*
a) *si* $n = 2$, *pasar al punto* 7;

Algunos comentarios

b) si $n > 2$, *pasar al punto* 10.
7*) Comparar* $f(x_1)$ *y* $f(x_2)$*:*
a) Si $f(x_1) \leq f(x_2)$, *pasar al punto* 8;
b)Si $f(x_1) > f(x_2)$, *pasar al punto* 9.
8) *Tomar* $y = x_1$ *y concluir el proceso.*
9)*Tomar* $y = x_2$ *y concluir el proceso.*
10) *Comparar* $f(x_1)$ *y* $f(x_2)$:
a) Si $f(x_1) \leq f(x_2)$, *pasar al punto* 11;
b) si $f(x_1) > f(x_2)$, *pasar al punto* 14.
11) *Indicar* x_2 *por* x'',

Algunos comentarios

$$x_1 \; por \; x_2,$$

$$n - 1 \; por \; n$$

12) *Calcular*

$$x_1 = x + \frac{u_n}{u_{n+2}}(x' - x)$$

13) *Calcular* $f(x_1)$ *y pasar al punto* 6

Algunos comentarios

14) *Indicar*

$$x_1 \ por \ x',$$

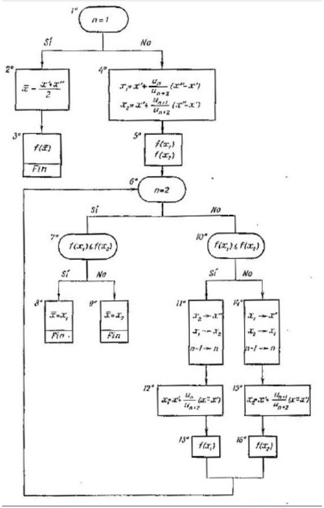
$$x_2 \ por \ x_{1,} \ n-1 \ por \ n$$

15) *Calcular*

$$x_2 = x' + \frac{u'_{+1}}{u_{n+2}}(x' - \grave{x})$$

16) *Calcular* $f(x_2)$ *y pasar al punto* 6

Esto se puede visualizar como sigue:


n = 1
Sí
No
f(x̄)
Fin
n=2
Sí
No
Fin
Fin

Example

Para concluir veamos un ejemplo de la aplicación del plan descrito, buscando mediante 5 cálculos en el segmento desde 1 hasta 2 el punto minimo de la función :

$$f(x) = \frac{1}{x} + \sqrt{x}.$$